AHPにおける整合性診断について(不確実な状況における意思決定の理論と応用)

田中, 浩光

数理解析研究所講究録
第1589巻 2008年 157-166

AHPにおける整合性診断について

愛知学院大学経営学部　田中　浩光(Hiromitsu Tanaka)
Faculty of Management,
Aichi-Gakuin University

1．はじめに

AHP（Analytic Hierarchy Process）方式では、一対比較値からなる行列（以下、一対比較値行列）に基づき、比較対象である各項目の重要度の推定に関心が集中する。推定方法には、統計的基準に基づく提案もなされてきているが、実践的で代表的な推定方法としては、AHP 方式の提唱者であるサーティ(Saaty,T,L.)の固有値法が通常である。AHP 方式にしたがう一対比較値には、評価の際に生じる評価者固有のバラツキに加えて、比尺度化、離散化、逆数対称化などAHP 方式に依拠する偏りが含まれることに注意が要る。実践では、一対比較値行列の整合性診断として、その点検方法に固有値法と密接に関係するサーティのC.I.(Consistency Index)基準が用いられるのが通常である。C.I.の有用性については数値実験も含めた性能評価の研究が精力的になされてきている(仁科・柴山(1992),小澤(2004)など)。しかし、C.I.は方向性のない包括的指標と理解できるため、再評点化に繋げる積極的な解釈づけには結びつきにくいと考えられる(田中(2005))。一方、実践的な接近の1つとして、サーティの整合性基準を緩和する提案もみられる(田中(2007b))。

また、一対比較値の整合性を診る新しい点検方法の探索を意図するとき、項目対の相対残差、3項目の組み合わせに基づくサーティの整合性基準C.I.の類推に基づき、4項目の組み合わせに着目する試みが見られる。田中(2007a)は、項目数が4である特徴を活かして、テトラッド(宮川(2004)で紹介された、Spearmanの1因子モデルでの相関係数の積)に類似する評点積(以下、テトラッド)を適用する。その上で新たに構成するテトラッド比に基づき、一対比較値の比尺度性の診断を試みている。本稿では、一対比較値行列において、重要度の推定に影響を及ぼす、理想評点である比尺度性・サーティの整合性からの乖離、すなわち誤差の配置に着目する。整合性診断の新しい点検対象を探るなかでテトラッド比の有効性を検討する。

第2節では、一対比較値の生成に影響を及ぼす評点化過程の整理を試みる。第3節では、一対比較値の生成を定式化する。評価者固有の潜在的な重要度のもとで、比尺度性を想定する誤差モデルをとりあげる。第4節では、整合性診断の対象として、AHP 方式固有の比尺度性とサーティの整合性をとりあげる。とくに、これらの性質と整合性の関係について整理する。第5節では、整合性診断の点検について考察する。第6節では、項目数に基づく点検、とくに2項目間の相対残差、3項目間での推移則の成立を問うC.I.について整理する。第7節では、点検の項目数を4に限定することで、誤差配置に着目して、一対比較値に対する整合性（比尺度性）の点検対象を新しく見出すことを意図して、テトラッド比の挙動を吟味する。第8節では、人工例に基づく数値例の吟味を通して、相対残差、3項目の組み合わせに基づくC.Iを対照に、テトラッド比の点検指標としての有効性を探る。

2.一対比較での評点化過程と重要度の導入

比較対象のｎ項目に対する一対比較では、下記の手順(1),(2)を通して、一対比較値行列Ａを得る。

$A = \{a_{ij}\}$

ここに、$i,j = 1,\cdot\cdot\cdot,n$ に対し、

$$a_{ij}^{-1} = a_{ji} \quad ,a_{ii} = 1 \qquad (1)$$

$$\max\{a_{ij}\ ,\ a_{ji}\} \in \{1,\cdot\cdot\cdot,9\} \qquad (2)$$

評点 a_{ij} は、逆数対称化(1)、離散化(2)の縛りを受けることに留意する。AHP 方式に付随する制約以外にも、評点 a_{ij} には、評点化に際しての過大・過小見積もり、一対比較の試行に起因するバラツキなど様々な撹乱要因を含む（田中(2007b)。一対比較値の評点化過程を図示する(図 1)。

サーティによるAHPでは、次の２つの想定が重要である。

①比較対象のｎ項目に対し、真の重要度(重み)W＝$\{w_i\}$を導入する。

②比尺度性を想定する。評価者の有する潜在的な重要度(重み)に基づいて、比尺度性のもとで項目対の相対評価がなされる。

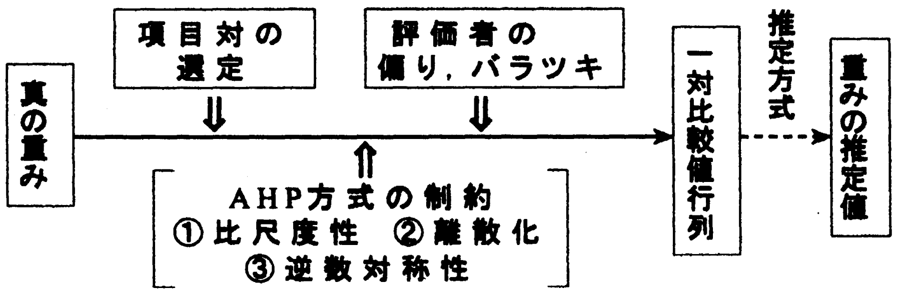


図１．AHPにおける一対比較での評点化過程

３．誤差モデル

本節では、一対比較値の生成を定式化する。その際、離散化については考慮せず、評点化過程に注意する。また、誤差モデル(2)は重要度(以降、重み)W を変量ではなく母数として扱うことに留意する。すなわち、重み W＝$\{w_i\}$は、評価者固有であり、一対比較の実施に対し、固定値で不変とする。

本稿では、一貫して、下記の誤差モデル(2)を用いて、一対比較値の生成を定式化する。

$$
\begin{aligned}
a_{ij} &= T(f_0(W,E)) & (1)\\
&= T(f_0(E \mid W))\\
&\fallingdotseq T(f_1(\varepsilon_{ij} \mid w_i\ ,w_j\ ))\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\fallingdotseq (w_i\ /w_j\ )\cdot \varepsilon_{ij} & (2)
\end{aligned}
$$

ここに、$\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$は誤差であり、Ｔは離散化関数であり、 f_0, f_1は、それぞれ未知関数である。

重みの推定は、Saaty の固有値法で得られるのが通常である。

〔固有値法〕

$$AU_{max} = \lambda_{max} \cdot U_{max} \tag{3}$$

ここに、λ_{max} : A の最大固有値、U_{max} : λ_{max}に対応する主固有ベクトル、$U_{max} = \{u_i\}$。

u_iを第 i 項目の重みとする。固有値法で求められた u_iを重みw_iの推定値と考えることができる。

4．一対比較値行列の整合性

本稿で取り扱う、一対比較値の整合性とは、一対比較による評点付け、一対比較値の生成、これは、重みの推定性能に与える影響が吟味される。比尺度性・サーティの整合性に着目する。一般に、整合性(Consistency,Coherence など)の基準は多様であると考えられる。

①推定結果と固有知識の突合せに基づく解釈上の整合性。

②AHP 方式に付随する前提や制約から派生する内的整合性。

③評点の間で存在する項目間情報などの意味上の縛り、あるいは推移則の活用など論理的整合性。

本稿で取り上げる、比尺度性、サーティの整合性は上記の事項(2)、(3)に相当する。AHP 方式の前提である比尺度性は、すべての項目対に対して理想的な成立を要請する。推移則の成立を、潜在的な重要度から離れ、評点である一対比較値に対して要請するものである。

以下に、比例尺度性とサーティの整合性の定義を与える。

〔比尺度性〕

(真の)重み$\{w_i\}$を想定し、一対比較行列 A が式(4)を満たすとき、

$$a_{ij} = w_i / w_j \tag{4}$$

A は比尺度性を有する。 誤差モデル(2)のもとでは、比尺度性(4)は

$$\varepsilon_{ij} = 1, \qquad ; \quad i,j = 1, \cdot\cdot\cdot n.$$

と表すことができる。

〔サーティの整合性〕

$n \geq 3$ のとき、一対比較行列 A が式(5)を満たすとき、

$$a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj}, \qquad ; \quad i,j,k = 1, \cdot\cdot\cdot n. \tag{5}$$

A はサーティの整合性を有する。

誤差モデル(2)のもとでは、サーティの整合性(5)は

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ik} \times \varepsilon_{kj}, \qquad ; \quad i,j,k = 1, \cdot\cdot\cdot n. \tag{6}$$

と表すことができる。

比尺度性はサーティの整合性を導く、すなわち、式(4)が式(5)を導く。因みに、AHP 方式に依拠する逆数対称性も比例性から導かれる。

以上の考察に基づき、本稿では、サーティの整合性と比尺度性は、評点上では識別ができないこと、尺度性とサーティの整合性は同一として捉える。以降の本論を進めるにあたり、各項目の重み(ベクト

ル)の各要素について推移則に着目する。誤差の発生は、(6)の成立からの乖離として考える。

5. 点検の視点

本節では、評点である一対比較値に対し整合性の点検を行なうとき、4 節の考察に基づき、整合性を、比尺度性・サーティの整合性に限定する。次いで、望ましい点検指標を探るため、点検方法と評価基準の関連について若干の整理を試みる。

- 評価の対象：項目間の順序が明確でない。評点数が少ない。
- 評価の場　：固有値法による推定結果での点検、評点上での点検
- 評価基準　：重みの推定性能、重みの推定値の順序性、一対比較値での論理上の整合など。
- 点検　　　：項目対の相対残差の利用、3 項目の組み合わせによる推移則の活用など。

点検指標には、一対比較値行列A 全体を対象とする整合性を測るサーティのC.I と、項目対ごとに点検する相対残差が用いられている。

一般に、点検の指標には、次の事項が要請される。

(1) 点検の対象は、整合性診断の対象と合致しなければならない。

(2) 評価者が保有する潜在的な重要度(重み)に依存しないことが望まれる。

(3) 比尺度性（サーティの整合性）からの乖離度について、単調性を有する。

比較対象項目の重要度w_iの推定における評価を考えるとき、評点数も少なく、加えて、評価者に基づく評定は、あいまいさを含む多様な要因に影響を強く受けることから、統計的推測の諸基準は馴染まないと考える。したがって、評点の一対比較値を評価の俎上にあげる。とくに本稿では、評点の配置の状況に着目する。その際、項目数による点検方法を採用する。

6. 項目数による点検

本稿では、一対比較値の整合性の問題を、評点の配置に基づいて考察する。以降では、議論を簡明にするため、項目を点とし、評点を枝とする有向グラフを考える。

2 項目の場合として項目対には相対残差、3 項目の場合としてサーティの整合性指標 C.I.

(1)相対残差

$$e_{ij} = a_{ij} / (u_i / u_j) \tag{7}$$

(2)サーティの整合性指標 C.I.]

C.I.(Consistency Index)は、サーティの整合性指標として知られ、次式で与えられる。

$$C.I. = (\lambda_{max} - n) / (n - 1) \tag{8}$$

ここに、

$$\lambda_{max} = n + \Sigma\Sigma(u_i - a_{ij}\, u_j)^2 / (a_{ij}\, u_i u_j) \tag{9}$$

相対残差で表すとき、

$$C.I. = 2 \cdot \Sigma\Sigma\,(e_{ij} - 1)\,/\,{}_nC_2 \tag{10}$$

を得る（仁科・柴山(1992)）。

比較対象の項目数 $n(\geq 4)$であるとき、整合性診断の点検の際に取り扱う項目数(以下、処理項目数) k とする組み合わせを{n, k}と表す.このとき、相対残差(7)、サーティの整合性指標(8)での点検する場合、{4,2},{4,3}が対応する。すなわち、n 項目からなる一対比較値行列 A の部分行列を選択して(ⅰ)あるいは(ⅱ)を繰り返し実施することが通常である。(ⅲ)は、本稿で主張する点検方法である。

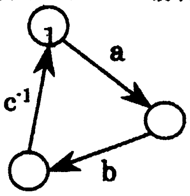
(ⅰ)相対残差の利用

(ⅱ)3 項目間の組み合わせにおいて推移則を活用する。3 項目における C.I.を適用する。

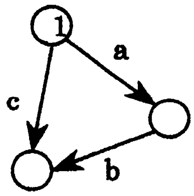
(ⅲ)4 項目の組み合わせに着目する。

ここに、(ⅱ)においては、4 項目から 3 項目(①、②、③)の一対比較行列を基本単位としてとりあげ、巡回有向グラフ(サイクル)と非巡回有向グラフに分ける。始点を①とし、前者は①→②→③→①となる。後者での a,b,c は①→②、②→③、①→③に対応する評点である。

・巡回有向グラフの場合（図 2）



・巡回有向グラフの場合（図 3）



推移則と C.I.の関係式は次の通りである(小澤(2004))。

$$C.I = \{Z^{1/3} + Z^{-1/3} - 2\} \div 2$$

ここに、$Z=ab/c$. $Z \geqq 1$ のときは、C.I.は Z について単調増加である。$Z < 1$ のときは C.I.は Z について 単調減少である。 単峰関係を利用して、

$C.I. \leqq 0.1 \rightarrow abc \leqq 3.78 (ab \geqq c^{-1})$ 　　 $C.I. \leqq 0.1 \rightarrow ab/c \leqq 3.78 (ab \geqq c)$

$C.I. \leqq 0.15 \rightarrow abc \leqq 5.07 (ab \geqq c^{-1})$ 　　 $C.I. \leqq 0.15 \rightarrow ab/c \leqq 5.07 (ab \geqq c)$

を得る。 $ab < c$ のときは、C.I.の臨界値は $3.78 \rightarrow (3.78)^{-1}$、$5.07 \rightarrow (5.07)^{-1}$ となる（田中(2007)）。

7．テトラッド比の活用：4 項目の組み合わせ

本節では、比較対象の項目数 n を 4、点検対象の処理項目数を 4 とし、項目の組(①、②、③、④)を基本単位とする。前節までの考察に基づき、AHP 方式に依拠する比尺度性と離散化の影響の大きさを考慮して、離散化は考慮の外に、整合性には比尺度性（サーティの整合性）をとりあげる。評点は、比尺度性を満足する一対比較値行列の各要素に誤差が付与することで生成されるとする。4 項目の組み合わせ{4,4}に基づくテトラッド比の活用を図る。

最初に、項目間の順序(①→②→③→④)において、互いに異なる添え字を有する評点積であるテトラッドを考える。3 通りのテトラッド、$a_{12}a_{34}$、$a_{13}a_{24}$,$a_{14}a_{23}$に対し、次のテトラッド比を考える。

(i) $R_{12\cdot34}$
$a_{12}a_{34}/a_{13}a_{24}$

(ii) $R_{12\cdot14}$
$a_{12}a_{34}/a_{14}a_{23}$

(iii) $R_{13\cdot14}$
$a_{13}a_{24}/a_{14}a_{23}$

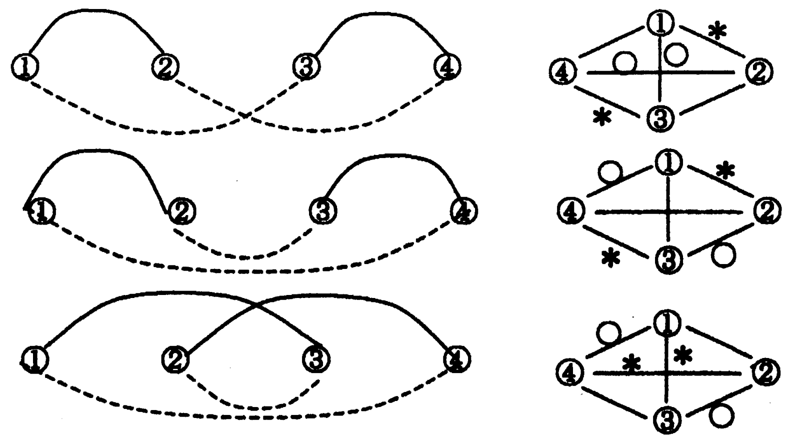


図4. テトラッド比

次に、誤差配置を伴う例として、比尺度性($\varepsilon_{ij}=1$,)、サーティの整合性($\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ik}\ \varepsilon_{kj}$)、そして誤差が付与する例($\varepsilon_{ij}\neq1$)として、それぞれ図5A,図5B、図5Cに与える。

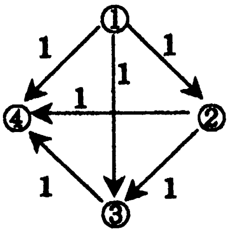


図5A 比尺度性

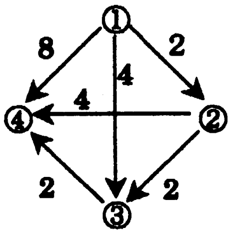


図5B サーティの整合性

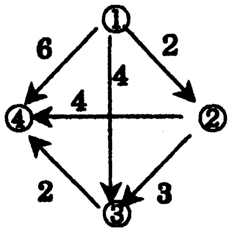


図5C 誤差が付与する場合

誤差モデルの下で、比尺度性が成立するとき、テトラッド比(i)、(ii)、(iii)の理想値は、それぞれ$a_{23}{}^{-2}$、$a_{23}{}^{-2}$、1である。本稿では、テトラッド比(i),(ii),(iii)を適当に組み合わせて、点検指標に用いる。テトラッド比が3項目でのC.I.に比較して有効となる一対比較値の状況を探る。たとえば、サーティの意味で、4項目,3項目でのC.I.で整合性が認められるときに、テトラッド比が理想値より大きい場合である。一対比較行列が比尺度性から崩れる状況として、比尺度性から外れる評点を有する場合を考える(例1~4)。Ho、Hsoは比尺度性、サーティの整合性の成立を意味する。

(i) $R_{12\cdot13}$

$R_{12\cdot13}=a_{23}^{-2}\varepsilon_{23}^{2}\cdot(\varepsilon_{12}\varepsilon_{34})/(\varepsilon_{13}\varepsilon_{24})$

H_0の下で、 $R_{12\cdot13}=a_{23}^{-2}$

H_{S0}の下で、 $R_{12\cdot13}=a_{23}^{-2}$

(ii) $R_{12\cdot14}$

$R_{13\cdot14}=(\varepsilon_{13}\varepsilon_{24})/(\varepsilon_{14}\varepsilon_{23})$

H_0の下で、 $R_{13\cdot14}=1$

H_{S0}の下で、 $R_{13\cdot14}=(\varepsilon_{13}\varepsilon_{24})/(\varepsilon_{14}\varepsilon_{23})$

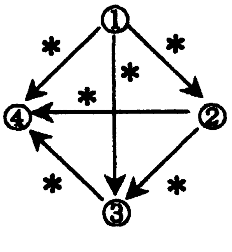
(iii) $R_{13\cdot14}$

$R_{12\cdot14}=a_{23}^{-2}\varepsilon_{23}^{2}\cdot(\varepsilon_{12}\varepsilon_{34})/(\varepsilon_{14}\varepsilon_{23})$

H_0の下で、$R_{12\cdot14}=a_{23}^{-2}$

H_{S0}の下で、$R_{12\cdot14}=a_{23}^{-2}\cdot(\varepsilon_{13}\varepsilon_{24})/(\varepsilon_{14}\varepsilon_{23})$

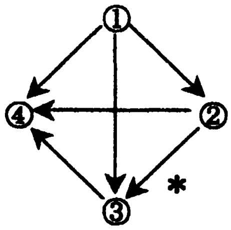
・例1:完全整合の場合: $\varepsilon_{ij}=1(\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ik}\ \varepsilon_{kj})$



$$a_{12}a_{34}/(a_{13}a_{24})=a_{23}^{-2}(=a_{23}^{-2})$$
$$a_{12}a_{34}/(a_{14}a_{23})=a_{23}^{-2}(=a_{23}^{-2})$$
$$a_{13}a_{24}/(a_{14}a_{23})=1$$

①比例性から外れる評点を有する項目対が1個の場合

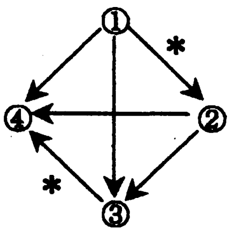
・例2：$\varepsilon_{23} \neq 1$



$$a_{12}a_{34}/(a_{13}a_{24}) = a_{23}^{-2}\varepsilon_{23}^{2}$$
$$a_{12}a_{34}/(a_{14}a_{23}) = a_{23}^{-2}\varepsilon_{23}$$
$$a_{13}a_{24}/(a_{14}a_{23}) = \varepsilon_{23}^{-1}$$

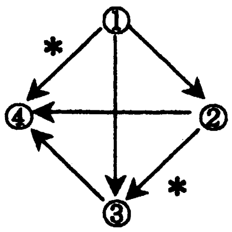
②比例性から外れる評点を有する項目対が2個の場合

・例3：$\varepsilon_{12} \neq 1$, $\varepsilon_{34} \neq 1$



$$a_{12}a_{34}/(a_{13}a_{24}) = a_{23}^{-2}\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}$$
$$a_{12}a_{34}/(a_{14}a_{23}) = a_{23}^{-2}\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}$$
$$a_{13}a_{24}/(a_{14}a_{23}) = 1$$

・例4：$\varepsilon_{14} \neq 1$, $\varepsilon_{23} \neq 1$



$$a_{12}a_{34}/(a_{13}a_{24}) = a_{23}^{-2}\varepsilon_{23}^{2}$$
$$a_{12}a_{34}/(a_{14}a_{23}) = a_{23}^{-2}\varepsilon_{23}\varepsilon_{14}^{-1}$$
$$a_{13}a_{24}/(a_{14}a_{23}) = (\varepsilon_{14}\varepsilon_{23})^{-1}$$

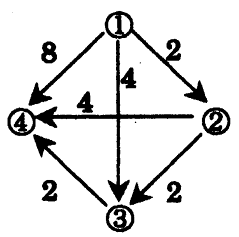
上記の結果を吟味・考察する。各例ごとに、誤差配置の意図と結果の解釈を要約する。例1は、完全に理想状態を示す一対比較値行列に対し、テトラッド比を確認する。理想値として$R_{12\cdot13}$が、$R_{12\cdot14}$、$R_{13\cdot14}$が、それぞれa_{23}^{-2}、a_{23}^{-2}、1である。例2は、理想状態(サーティの整合性)に誤差が1個を付与する場合のテトラッド比を確認する。$R_{13\cdot14}$が$(\varepsilon_{23})^{-1}$となり、誤差の影響が見られる。例3、例4は、理想状態から誤差が2個を付与する場合でのテトラッド比を確認する。例3は、$R_{12\cdot14}$が$a_{23}^{-2}\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}$となり、2つの誤差の相乗的な影響があることに注意する。例4は、$R_{13\cdot14}$が$(\varepsilon_{14}\varepsilon_{23})^{-1}$となり、2つの誤差の相乗的な影響が逆数関係にあることに注意する。

例の吟味・考察を整理する。誤差が1つの場合は、その影響の程度が誤差の大きさに比例する。誤差の出現の位置により、逆数関係の影響がある。これらの関係はテトラッド比を構成するテトラッドの位置が分母あるいは分子により異なることになる。誤差が2つの場合も同様の結果が生じる。とくに、誤差2個の出現の位置がグラフ的に同じ点を共有しないとき、相乗的な影響が期待されるため、点検効果が期待できる。この効果は、3項目での推移則を活用とするC.I.の点検効果と異なる。

8．数値例

テトラッド比が有する整合性の点検性能について、一対比較値行列の数値例(人工データ)を通して、項目対の相対残差、3項目の組み合わせに基づくC.I.を対照に、評価する。全数値例において、誤差出現の配置を検出するか否かで診る。評点の配置では項目間に順序を仮定する（①→②→③→④)。全ての3項目は非巡回有向グラフとなる。推移則の近似的成立の有無については、C.I.値が0.1とする経験則を採用する。数値例には、完全整合（比例性）の例、誤差が1個を有する例、誤差が2個を有する例をとりあげる。

・数値例1：完全整合の場合



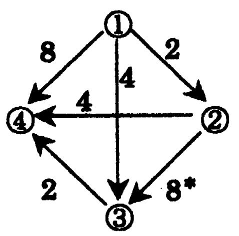
C.I.=0.0

(1) $a_{23}/(u_2/u_3)=1.0$

(2) $a_{12}a_{23}/a_{13}=2\cdot 2/4=1$
$a_{12}a_{24}/a_{14}=2\cdot 4/8=1$
$a_{13}a_{34}/a_{14}=4\cdot 2/8=1$
$a_{23}a_{34}/a_{24}=2\cdot 2/4=1$

(3) $a_{12}a_{34}/(a_{13}a_{24})=2\cdot 2/(4\cdot 4)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)$
$a_{12}a_{34}/(a_{14}a_{23})=2\cdot 2/(8\cdot 2)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)$
$a_{13}a_{24}/(a_{14}a_{23})=4\cdot 4/(8\cdot 2)=1\ (1)$

・数値例2：誤差が1つの場合($\varepsilon_{23}=4$)



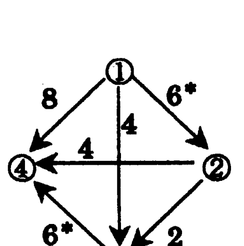
C.I.=0.083

(1) $a_{23}/(u_2/u_3)=1.940$

(2) $a_{12}a_{23}/a_{13}=2\cdot 8/8=2$
$a_{12}a_{24}/a_{14}=2\cdot 4/8=1$
$a_{13}a_{34}/a_{14}=4\cdot 2/8=1$
$a_{23}a_{34}/a_{24}=8\cdot 2/4=4^*$

(3) $a_{12}a_{34}/(a_{13}a_{24})=2\cdot 2/(4\cdot 4)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)$
$a_{12}a_{34}/(a_{14}a_{23})=2\cdot 2/(8\cdot 8)=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)$
$a_{13}a_{24}/(a_{14}a_{23})=4\cdot 4/(8\cdot 8)=\frac{1}{4}\ (1)$

・数値例3：誤差が2つの場合($\varepsilon_{12}=3$、$\varepsilon_{34}=3$)



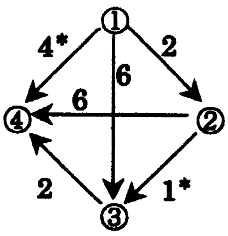
*C.I.=0.103

(1) $a_{12}/(u_1/u_2)=1.732$
$a_{34}/(u_3/u_4)=1.732$

(2) $a_{12}a_{23}/a_{13}=6\cdot 2/4=3$
$a_{12}a_{24}/a_{14}=6\cdot 4/8=3$
$a_{13}a_{34}/a_{14}=4\cdot 6/8=3$
$a_{23}a_{34}/a_{24}=2\cdot 6/4=3$

(3) $a_{12}a_{34}/(a_{13}a_{24})=6\cdot 6\ /(4\cdot 4)=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)$
$a_{12}a_{34}/(a_{14}a_{23})=6\cdot 6\ /(8\cdot 2)=\frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)$
$a_{13}a_{24}/(a_{14}a_{23})=4\cdot 4\ /(8\cdot 2)=1(1)$

・数値例4：誤差が2つの場合($\varepsilon_{14}=3^{-1}$、 $\varepsilon_{23}=3^{-1}$)



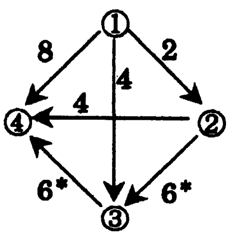
C.I.=0.103

(1) $a_{14}/(u_1/u_4)=1.733$
$a_{23}/(u_2/u_3)=1.733$

(2) $a_{12}a_{23}/a_{13}=2\cdot1/6=0.5$
$a_{12}a_{24}/a_{14}=2\cdot6/4=3$
$a_{13}a_{34}/a_{14}=6\cdot2/4=3$
$a_{23}a_{34}/a_{24}=1\cdot2/6=0.33$

(3) $a_{12}a_{34}/(a_{13}a_{24})=2\cdot2\ /(6\cdot6)=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}\right)$
$a_{12}a_{34}/(a_{14}a_{23})=2\cdot2\ /(4\cdot1)=1\left(\frac{1}{9}\right)$
$a_{13}a_{24}/(a_{14}a_{23})=6\cdot6\ /(4\cdot1)=9(1)$

・数値例5：誤差が2つの場合($\varepsilon_{23}=3$、 $\varepsilon_{34}=3$)



C.I.=0.162

(1) $a_{23}/(u_2/u_3)=2.276$
$a_{34}/(u_3/u_4)=2.171$

(2) $a_{12}a_{23}/a_{13}=2\cdot6/4=3$
$a_{12}a_{24}/a_{14}=2\cdot4/8=1$
$a_{13}a_{34}/a_{14}=4\cdot6/8=3$
$a_{23}a_{34}/a_{24}=6\cdot6/4=9^{**}$

(3) $a_{12}a_{34}/(a_{13}a_{24})=2\cdot6/(4\cdot4)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)$
$a_{12}a_{34}/(a_{14}a_{23})=2\cdot6/(8\cdot6)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)$
$a_{13}a_{24}/(a_{14}a_{23})=4\cdot4/(8\cdot6)=\frac{1}{3}(1)$

上記の結果を吟味・考察する。各数値例について、誤差配置の意図と結果の解釈を要約する。数値例1では、完全整合例のテトラッド比、相対残差、3項目でのC.I.、4項目からなる一対比較値行列のC.I.を確認する。相対残差、3項目のC.I.は、いずれも理想値の1である。テトラッド比は、a_{23}が2であるため、$R_{12\cdot13}$、$R_{12\cdot14}$は1/4であり、$R_{13\cdot14}$は1である。数値例2は、誤差が1個の場合であるため、テトラッド比の点検効果は著しくない。誤差ε_{23} ＝ 4であり、経験則からは大きな誤差とされるが、相対残差は1.940(<3)と検出の対象とならない。3項目のC.I.では、(②,③,④)で4(>3.78)となり、検出の対象となる。因みに、4項目のC.I.は0.083(<0.1)であり、サーティの整合性基準では一対比較値行列の整合性を認めることになる。数値例3、数値例4、数値例5は、いずれも誤差が2個+の場合である。数値例3では、4項目のC.I.が0.103(>0.1)であり、サーティの整合性は認められない。テトラッド比は$R_{12\cdot13}$、$R_{12\cdot14}$が9/4であり、理想値1/4の9倍である。いずれのテトラッド比にも共有するテトラッドは$a_{12}a_{34}$であり、2つの誤差を検出することになる。一方、相対残差が1.732(<3)、3項目のC.I.が3(<3.78)であるため、検出されないことになる。

数値例4では、4項目のC.I.は0.103(>0.1)であり、サーティの整合性は認められない。テトラッド比は、$R_{12\cdot14}$、$R_{13\cdot14}$、がそれぞれ1,9であり、理想値1/9,1の9倍、1/9倍である。いずれのテトラッド比にも共有するテトラッドは$a_{14}a_{23}$であり、2つの誤差を検出することになる。一方、相対残差が1.733(<3)、3項目のC.I.が0.5(>0.26).3(<3.78),3(<3.78),0.33(>0.26)であるため検出されないことになる。数値例5では、4項目のC.I.が0.162(>0.1)であり、サーティの整合性は認められないが、

3つのテトラッド比は、理想値と大きくは異ならず、点検効果は認められない。3項目のC.I.では、{②,③,④} で 9(>3.78)となり、検出の対象となる。相対残差は 2.276 (<3) ,2171 (<3) となり、検出されない。以上、整理すると、テトラッド比が有効であることを示す数値例3、数値例4は、いずれもグラフ的に誤差の位置が同じ点を共有しないことである。これらの例は、7節の指摘に符合する。

9．おわりに

AHP 方式の効果的な適用においては、一対比較値行列の整合性の点検が重要となる。整合性の意味は多様である。本稿では、比尺度性とサーティの整合性をとりあげて、テトラッド比の活用による点検を試みた。一対比較値の点検では、項目数に着目し、とくに項目対での相対残差、3 項目での推移則に基づく C.I.を参照することで、テトラッド比が有効となるときの誤差配置、すなわち比尺度性・サーティの整合性の理想状況からの崩れの累計を探ることにあった。本稿での試みは、4 項目の組み合わせの特徴を活かして、崩れの類型を検出するに留まっている。実践に供するには、多くの誤差配置に対し、テトラッド比の振舞を明らかにすることなど、多くの課題が残されている。

参考文献

(1)Saaty,T.L.(1980).The Analytic Hierarchy Process,McGraw Hill,New YorK.

(2)仁科健、柴山忠雄(1992).一対比較における固有ベクトル法と対数最小二乗法の比較、品質、22, 2,115-123.

(3)宮川雅巳(2004).統計的因果推論、一回帰分析の新しい枠組み一、朝倉書店.

(4)小澤正典(2004). AHP における整合度 C.I.値の意味と解釈、OR学会部会「AHP の世界」資料(2004.9.24).

(5)田中浩光(2005).AHP における一対比較データの整合性について、OR学会部会「不確実性理論の経営科学のへの応用」資料(2005.12.23).

(6)田中浩光(2006).AHP における C.I.の解釈、日本 OR学会春季研究発表会アブストラクト集,142-143.

(7)田中浩光(2007a).AHP における一対比較値の比例性診断について、日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集、108-109.

(8)田中浩光(2007b).AHP における一対比較値の緩和な整合性指標について、京都大学数理解析研究所講究録 1348,122-129. (RIMS 研究集会、2006.11.14) .

田中　浩光

愛知学院大学経営学部

〒470-0195　愛知県日進市岩崎町阿良池 12

Email : htanaka@dpc.aichi-gakuin.ac.jp